MEMORANDUM

FRA

SOSIALØKONOMISK INSTITUTT

UNIVERSITETET I OSLO

GA

22. juli 1977

NATURRESSURSER OG ØKONOMISK VEKST

Av

Michael Hoel

ISBN 82-570-8110-8

N A T U R R E S S U R S E R   O G   Ø K O N O M I S K   V E K S T*

A V

M I C H A E L   H O E L

1. *Innledning.*

Dette notatet tar sikte på å gi en forholdsvis enkel framstilling av hvordan tilstedeværelsen av ikke-fornybare naturressurser (ofte kalt "lager-ressurser") kan tenkes å påvirke en økonomis vekst. For å belyse denne problemstillingen, skal jeg studere en enkel aggregert vekst-modell. En lignende modell er utgangspunktet for analyser av blant andre Solow (1974), Stiglitz (1974 a & b), Solow & Wan (1976) og Dixit (1976, kap. 7). Enkelte resultater i dette notatet er utledet i ovennevnte litteratur, men i de fleste tilfeller er framstillingen noe forskjellig.

Disposisjonen av dette notatet er som følger: I *kapittel 2* presenteres modellen, og de enkelte relasjoner forklares. I kapittel 3 utledes en del sammenhenger som gjelder enten en har teknisk framgang eller ikke. Kapittel 4 analyserer tilfellet hvor det er teknisk framgang, mens kapittel 5 tar for seg tilfellet hvor det ikke forekommer teknisk framgang.

*) Jon Vislie har lest gjennom manuskriptet og gitt forslag til en del endringer. Ansvaret for gjenstående feil og uklarheter er selvsagt mitt.

2. *Oppstilling og drøfting av modellen.*

Det kan være hensiktsmessig først å definere de viktigste variablene som vil bli brukt i det følgende. Disse er

$Y(t)$ = total produksjon (nettonasjonalprodukt) pr. tidsenhet,
$C(t)$ = konsum pr. tidsenhet,
$R(t)$ = bruk av naturressurser pr. tidsenhet,
$S(t)$ = gjenværende beholdning av naturressurser,
$K(t)$ = beholdning av realkapital,
$x(t)$ = $Y(t)/K(t)$ = produksjon pr. enhet realkapital,
$z(t)$ = $R(t)/S(t)$ = andel av ressursbeholdning som utvinnes pr. tidsenhet,
m = raten for teknisk framgang (forutsatt ikke-negativ og konstant),
s = $\dot{K}(t)/Y(t)$ = investeringsrate (forutsatt positiv og konstant),
A,a,b = positive konstante parametre i produktfunksjonen.

Følgende notasjon vil bli brukt for derivasjon og logaritmisk derivasjon (dvs. vekstrater):

$$\dot{Y}(t) = \frac{dY(t)}{dt}$$

og

$$\hat{Y}(t) = \frac{d \log Y(t)}{dt} = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)},$$

og tilsvarende for alle andre variable som er funksjoner av tid. I det følgende vil tidsreferansen t bli sløyfet hvor dette ikke kan føre til misforståelser, og fotskriften 0 vil bli brukt for å markere variabelverdien på initialtidspunktet ($t = 0$). Endelig vil streker over symbolene markere asymptotiske verdier som variablene vil konvergere mot.

Modellen som vil bli brukt består av fire relasjoner, disse er

$$Y = e^{mt}AK^{a}R^{b}, \tag{2.1}$$

$$\dot{K} = sY, \tag{2.2}$$

$$\hat{Y} - \hat{R} = a\frac{Y}{K} \tag{2.3}$$

$$(2.4) \qquad \int_0^\infty R(t)dt \leqq S_0.$$

Den første relasjonen er en produktfunksjon, hvor produksjonen etter at eventuell kapitalslit er dekket antas å avhenge av beholdningen av realkapital samt bruken av naturressurser. Det antas at a og b er positive og at $a + b < 1$. Det er med andre ord forutsatt avtakende utbytte m.h.p. skalaen i variablene K og R. Dette kan være begrunnet med at produksjonen "egentlig" avhenger av sysselsetting L i tillegg til K og R, og at produktfunksjonen er homogen av grad 1 i de tre variablene K, R og L:

$$(2.1') \qquad Y = e^{mt}AK^aR^bL^{1-a-b} .$$

Hvis sysselsettingen antas å være eksogent gitt og konstant, kan en velge måleenheten av sysselsettingen slik at $L(t) = 1$ for alle t, slik at (2.1') og (2.1) blir identiske. Det er to grunner til at sysselsettingen vil bli forutsatt konstant i det følgende: For det første vil analyser av ikke-fornybare naturressurser typisk ha et svært langt tidsperspektiv. Med et slikt tidsperspektiv virker det svært urimelig å forutsette noen befolkningsvekst av betydning. Og på lang sikt kan vi ikke ha noen vekst i sysselsettingen av betydning dersom ikke befolkningen øker. Den andre grunnen til at sysselsettingen forutsettes konstant er at hvis L(t) i stedet antas å øke med en konstant rate n, er det lett å kontrollere at de eneste endringene i våre resultater blir at m erstattes med $m + (1 - a - b)n$. For å finne vekstrater av variable pr. sysselsatt, kan en så trekke n fra de aktuelle vekstrater som er funnet på denne måten. Denne enkle utvidelsen overlates til leseren. Det er imidlertid ett viktig tilfelle vår modell ikke dekker: Hvis n er negativ og så stor i tallverdi at $m + (1 - a - b)n < 0$, får vi en situasjon som ikke er behandlet i dette notatet. Merk at $n < 0$ ikke trenger å bety en reduksjon av befolkningen, det kan simpelthen skyldes at arbeidstiden stadig reduseres. En utvikling mot stadig kortere arbeidstid er kanskje ikke så urimelig i en økonomi hvor knappe naturressurser setter skranker på mulighetene for økonomisk vekst. Til tross for denne innvendingen skal vi i det følgende anta at (2.1) gjelder med $m \geqq 0$.

Det kan muligens se ut som en aggregert funksjon av typen (2.1) eller (2.1') forutsetter at naturressursene kan utvinnes uten kostnader. Dette er imidlertid ikke tilfelle. Anta at økonomien tilfredsstiller følgende relasjoner hvor notasjonen skulle være selvforklarende:

$$Y = F_Y(K_Y, L_Y, R_Y, t),$$

$$R = F_R(K_R, L_R, t),$$

$$K_Y + K_R = K,$$

$$L_Y + L_R = L.$$

Til gitte verdier av K, L, R og t fins det da en maksimal Y, definert ved

$$Y = \Phi(K,L,R,t) = \text{Max } F_Y(K_Y, L_Y, R_Y, t)$$

under bibetingelsen at de fire relasjonene over samt $K_Y \in [0,K]$, $L_Y \in [0,L]$ holder. Dersom funksjonene $F_Y(\cdot)$ og $F_R(\cdot)$ er homogene av grad 1 i sine argumenter (unntatt t), vil $\Phi(\cdot)$ også være homogen av grad 1 i K, L og R. Det er denne funksjonen $\Phi(\cdot)$ som er representert ved (2.1'), eller (2.1) når L er forutsatt konstant. Grenseproduktiviteten $\partial\Phi/\partial K = bY/R$ er da lik grenseproduktiviteten $\partial F_Y/\partial R$ *minus* den marginale utvinningskostnaden, målt i enheter av Y.

Det ville kanskje vært rimelig å inkludere gjenværende ressursbeholdning S i produktfunksjonen for R, dvs. å anta at

$$R = F_R^*(K_R, L_R, S, t) \quad \text{hvor} \quad \frac{\partial F_R^*}{\partial S} > 0.$$

I så fall ville S også måtte inngå i den aggregerte produktfunksjonen av typen (2.1'). Vi skal se bort fra dette her, og nøye oss med å vise til Heal (1976) og Solow & Wan (1976), som behandler vekst med naturressurser når ressursens utvinningskostnader på ethvert tidspunkt avhenger av gjenværende ressursbeholdning.

Funksjonen i (2.1) er av Cobb-Douglas typen. Denne er valgt først og fremst fordi den er enkel å arbeide med, og ikke fordi det er noen spesiell grunn til å tro at en slik funksjonsform gir en bedre beskrivelse av økonomien enn mange andre funksjonsformer. Dasgupta & Heal (1974), Solow (1974) og Stiglitz (1974 a) har imidlertid gitt noen argumenter i tillegg til analytisk bekvemmelighet for hvorfor en Cobb-Douglas funksjon kan være av spesiell interesse. Vekstmodeller med naturressurser med mer generelle produktfunksjoner enn (2.1) har vært analysert av Dasgupta & Heal (1974) (her antas imidlertid produktfunksjonen å være homogen av grad 1 i K og R), Weinstein & Zeckhanser (1974), Ingham & Simmons (1975) og Garg & Sweeney (1976).

Den tekniske framgangen i vår modell er av den enkle eksogene typen som ikke avhenger av investeringstidspunkter. Dette er selvsagt en svært tvilsom forutsetning, men er brukt her for å holde modellen så enkel som mulig og for å gjøre modellen mest mulig lik de enkleste - og mest vel-kjente - vekstmodeller uten naturressurser. En drøfting av alternative måter å behandle teknisk framgang på er gitt av Dixit (1976, kap. 4) og Hoel (1976), som også gir henvisninger til mer spesiell litteratur på området.

Investeringsrelasjonen (2.2) kan gis samme begrunnelse som gitt ovenfor for teknisk framgang. En konstant, eksogen investeringsrate er ikke en spesielt god forutsetning, men vil bli brukt fordi den er enkel å arbeide med og fordi den ofte er brukt i enkle vekstmodeller uten naturressurser. Legg merke til at dersom b = 0 vil relasjonene (2.1) og (2.2) utgjøre den enkle aggregerte vekstmodellen av Solow-Swan typen (se Solow, 1956 og Swan 1956) med konstant sysselsetting og en Cobb-Douglas produktfunksjon. Det kan derfor være instruktivt å sammenlikne resultatene i de følgende avsnitt med spesialtilfellet hvor b = 0. Dette vil i noen utstrekning bli gjort i den følgende analysen.

Et enkelt alternativ til (2.2) er å forutsette at lønnstakerne bruker hele sin inntekt til konsum, mens kapitalistene sparer en andel s_k av sin inntekt. Kapitalistene består av eiere av realkapital og naturressurser. Under vanlige forutsetninger om profittmaksimerende bedrifter vil lønns-andelen i økonomien være gitt ved (1 - a - b)Y. Kapitalistenes inntekt blir derfor (a + b)Y, og deres sparing blir $s_k(a + b)Y$. Investering som andel av total produksjon, dvs. $\dot{K}/Y$, er derfor lik $s_k(a + b)$. Med andre ord, dersom vi bruker ovennevnte spareforutsetning i stedet for (2.2) blir resul-tatene våre de samme som når (2.2) brukes, bortsett fra at s overalt må erstattes med $s_k(a + b)$. Dette vil ikke bli gjennomført i det føl-gende.

På ethvert tidspunkt avhenger ikke produksjonen bare av realkapital (og arbeidskraft), men også av hvor stor ressursbruken R er. Relasjonene (2.3) og (2.4) forklarer hvordan R bestemmes. Sistnevnte relasjon uttrykker at total ressursbruk ikke kan overstige den tilgjengelige ressursbeholdning på initialtidspunktet. Vi skal anta at ressursbeholdningen setter en effek-tiv skranke på økonomien, slik at vi i det følgende vil anta at (2.4) gjelder med likhetstegn. Nå er det åpenbart mange tidsutviklinger av variabelen R(t) som tilfredsstiller (2.4). Men ikke alle slike utviklinger er *effektive*, i betydningen at konsumet bare kan økes over en periode hvis det går ned i en annen periode. Mer presist: Definer settet Π som alle konsumbaner $C(t)$ over intervallet $[0,\infty)$ som tilfredsstiller $C(t) = Y(t) - \dot{K}(t)$, (2.1), (2.4), $R(t) \geqq 0$, $K(t) \geqq 0$ samt $K(0) = K_0$ (som er eksogent gitt). En konsumbane $C^*(t)$ er effektiv dersom $C^*(t) \in \Pi$ og det ikke finnes noen annen konsumbane $C^{**}(t) \in \Pi$ slik at $C^{**}(t) \geqq C^*(t)$ for alle $t \geqq 0$ og $C^{**}(t) > C^*(t)$ i et eller annet intervall $[t',t'']$ hvor $0 \leqq t' < t''$.

Et grunnleggende resultat i teorien om bruken av ikke-fornybare naturressurser er at i modeller av typen (2.1) - (2.4) er følgende betingelse nødvendig for effektivitet: Grenseproduktiviteten av naturressursen ($= bY/R$) må *endre seg* med en rate som på ethvert tidspunkt er lik *nivået* av realkapitalens grenseproduktivitet ($= aY/K$).[1] Det er nettopp denne betingelsen som (2.3) uttrykker.

Vi skal ikke gå inn på det formelle beviset for resultatet over, men vise til Solow (1974) og Weinstein & Zeckhanser (1974). Det kan også nevnes at resultatet er et spesialtilfelle av betingelsen for effektivitet når en har vekst med flere typer kapitalvarer, som utledes av Dorfman, Samuelson og Solow (1958, kap. 12). Her skal vi nøye oss med å skissere hvorfor denne betingelsen må gjelde. Kall grenseproduktiviteten av naturressurser og realkapital henholdsvis $q(t)$ og $r(t)$. La oss nå overveie to måter å øke konsumet på tidspunkt $t + \theta$, hvor θ har en "liten" positiv verdi. En måte å oppnå en konsumøkning på ville være å øke ressursbruken på tidspunkt $t + \theta$ med 1 enhet, som ville gi en produksjonsøkning lik $q(t + \theta)$, som kunne brukes til økt konsum. En alternativ måte ville være å øke ressursbruken på tidspunkt t med 1 enhet, som ville gi en produksjonsøkning lik $q(t)$. Denne produksjonsøkningen kunne brukes til investering, slik at kapitalmengden ville øke med $q(t)$ i intervallet $[t,t + \theta]$. Hver enhet økt kapitalmengde vil resultere i en total produksjonsøkning tilnærmet lik $\theta r(t)$ over perioden. Brukes hele økningen i kapitalmengden ($= q(t)$) samt den resulterende produksjonsøkningen ($\approx \theta r(t)q(t)$) til konsum på tidspunkt $t + \theta$, blir konsumøkningen på dette tidspunktet lik $(1 + \theta r(t))q(t)$. Langs en effektiv konsumbane må disse to alternative måtene å øke konsumet på $t + \theta$ gi samme konsumøkning, dvs. vi må ha

$$q(t + \theta) = (1 + \theta r(t))q(t).$$

1) Dersom kostnadene av å utvinne ressursene avhenger av gjenværende ressursmengde, blir betingelsen noe mer komplisert, se Heal (1976) og Solow & Wan (1976).

Grunnen til at denne likheten må holde er åpenbar: Hvis $q(t + \theta) < (1 + \theta r(t))q(t)$ kunne en øke ressursbruken og investeringene på t slik at $C(t)$ forble uendret. Da måtte ressursbruken reduseres på $t + \theta$, men konsumnedgangen som følge av dette ville være mindre enn konsumøkningen som følge av den økte investeringen på t. Med andre ord, det ville være mulig å øke $C(t + \theta)$ uten at konsumet gikk ned på noe annet tidspunkt. Et tilsvarende argument gjelder hvis vi i stedet hadde $q(t + \theta) > (1 + \theta r(t))q(t)$. Relasjonen over kan skrives

$$\frac{q(t + \theta) - q(t)}{\theta} = r(t)q(t)$$

Lar vi nå θ gå mot null, følger det av definisjonen for derivasjon at vi får

$$\dot{q}(t) = r(t)q(t) ,$$

eller $\hat{q}(t) = r(t)$, som er identisk med (2.3) når vi husker at $q(t) = bY(t)/R(t)$ og $r(t) = aY(t)/K(t)$.

Den rimeligste tolkningen av (2.3) er kanskje at vi ser på en planøkonomi hvor de styrende myndigheter forsøker å velge utviklingsbanen av $R(t)$ slik at (2.3) og (2.4) blir oppfylt. Alternativt kunne vi tenke oss at (2.3) ble oppfylt i en markedsøkonomi med et fullkomment kapitalmarked. I en slik økonomi ville noen eie beholdningen av naturressurser. For at disse eierne ikke skulle ønske å selge unna hele sin ressursbeholdning og bruke disse pengene til å kjøpe realkapital, som gir en avkastning pr. tidsenhet lik kapitalens grenseproduktivitet ($=r(t)$), må de tjene minst $r(t)$ pr. tidsenhet ved å eie beholdningen. Men avkastningen pr. tidsenhet av å eie en enhet naturressurser er lik verdiøkningen av denne ressursen. Forutsatt at brukerne av naturressurser er profittmaksimerende kvantumstilpassere, er verdien pr. enhet naturressurs lik dens grenseproduktivitet $q(t)$. Resonnementet over gir oss altså $\hat{q}(t) \geqq r(t)$. Men et tilsvarende argument innebærer at hvis $\hat{q}(t) > r(t)$ vil ingen ønske å eie realkapital. Så vi står igjen med betingelsen $\hat{q}(t) = r(t)$, som er identisk med (2.3).

Vi har nå diskutert de enkelte relasjonene i modellen og skal se mer i detalj på hvordan modellen virker. Men først kan det være hensiktsmessig å se nærmere på strukturen av modellen. Dersom Y og $\hat{Y}$ substitueres fra

(2.1) inn i (2.2) og (2.3),vil de to sistnevnte relasjonene utgjøre to differensiallikninger i K(t) og R(t). For gitte initialverdier K_0 og R_0 vil dermed hele tidsforløpet for K(t) og R(t) bli bestemt, og innsatt i (2.1) gir dette tidsforløpet for Y(t). Den initiale beholdningen av realkapital, K_0, er eksogent bestemt av økonomiens forhistorie. Derimot er R_0 *ikke* gitt eksogent, og godt er det: Med vilkårlige verdier K_0 og R_0 ville det bare være slump om det resulterende tidsforløpet av R(t) tilfredsstiller (2.4) med likhet. Dette indikerer at R_0 velges slik at initialverdiene K_0, R_0 sammen med differensiallikningene (2.2) og (2.3) gir en utviklingen av R(t) som tilfredsstiller (2.4) med likhet. Vi skal se at det enten fins en (og bare en) eller ingen verdi av R_0 som har denne egenskapen.

3. *Generelle egenskaper ved modellens løsning.*

I dette kapitlet skal vi se på endel egenskaper som holder enten $m > 0$ eller $m = 0$. Fra (2.1) og (2.2) har vi

$$\hat{Y} = m + a\hat{K} + b\hat{R} \tag{3.1}$$

og

$$\hat{K} = s\frac{Y}{K} \tag{3.2}$$

Fra (2.3) får vi et uttrykk for $\hat{R}$ som innsatt i (3.1) gir

$$\hat{Y} = \frac{m + a\hat{K} - abY/K}{1 - b} \tag{3.3}$$

Fra definisjonen $x = Y/K$ følger $\hat{x} = \hat{Y} - \hat{K}$, som sammen med (3.2), dvs. $\hat{K} = sx$ gir

$$\hat{Y} = \hat{x} + sx. \tag{3.4}$$

Sammen med (3.3) gir dette

$$\hat{x} + sx = \frac{m + asx - abx}{1 - b} \tag{3.5}$$

hvor vi har brukt (3.2) samt $x = Y/K$. Etter litt omgrupperinger av ledd kan dette uttrykket skrives som

$$\hat{x} = \frac{m}{1-b} - \frac{1}{1-b}\,[(1 - a - b)s + ab]x \tag{3.6}$$

eller

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x^2\ , \tag{3.7}$$

hvor

$$\alpha = \frac{m}{1-b} \geqq 0 \tag{3.8}$$

og

$$(3.9) \qquad \beta = \frac{(1 - a - b)s + ab}{1 - b} > 0.$$

Denne differensiallikningen har følgende løsning (se f.eks. Sydsæter og Thalberg (1976, formel 10.9)):

$$(3.10) \qquad x(t) = e^{\alpha t} h(t)^{-1},$$

hvor

$$(3.11) \qquad h(t) = \begin{cases} \frac{1}{x_0} + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1) & \text{for } \alpha > 0, \\ \frac{1}{x_0} + \beta t & \text{for } \alpha = 0. \end{cases}$$

Relasjon (3.10) gir oss en bestemt utvikling av x(t) for enhver verdi av x_0. Fra (2.1) følger det at for t = 0 gjelder

$$(3.12) \qquad x_0 = A\, K_0^{a-1} R_0^{b}.$$

Med andre ord, den valgte initialverdien R_0 vil determinere x_0, siden K_0 er eksogent gitt. Vi nevnte i slutten av kapittel 2 at R_0 må velges slik at (2.4) blir oppfylt med likhet. For å se nærmere på hva dette innebærer, får vi blant annet bruk for integralet $x(\tau)$ fra 0 til t. Det går fram av (3.10) og (3.11) at $x(t) = \hat{h}(t)/\beta$, dvs.

$$\int_0^t x(\tau)d\tau = \int_0^t \frac{1}{\beta}\hat{h}(\tau)d\tau,$$

og siden relasjonen

$$h(t) = h_0 e^{\int_0^t \hat{h}(\tau)d\tau}$$

alltid må gjelde, får vi, når $h_0 = 1/x_0$ innsettes:

$$(3.13) \qquad \int_0^t x(\tau)d\tau = \frac{1}{\beta}\,\mathrm{Ln}[x_0 h(t)].$$

Fra (2.3) og (3.4) følger det at

(3.14) $\hat{R} = \hat{x} - (a - s)x,$

dvs.

$$R(t) = R_0 e^{\int_0^t \hat{R}(\tau)d\tau} = R_0 e^{\int_0^t \hat{x}(\tau)d\tau} e^{-(a - s)\int_0^t x(\tau)d\tau}$$

Nå er

$$x(t) = x_0 e^{\int_0^t \hat{x}(\tau)d\tau},$$

slik at uttrykket over for R(t) blir

(3.15) $$R(t) = \frac{R_0}{x_0} x(t) e^{-(a - s)\int_0^t x(\tau)d\tau}$$

Venstre side av (2.4) kan derfor skrives

$$\int_0^\infty R(t)dt = \frac{R_0}{x_0}\int_0^\infty x(t) e^{-(a - s)\int_0^t x(\tau)d\tau} dt$$

Når $s \neq a$ er

$$\frac{d}{dt} e^{-(a - s)\int_0^t x(\tau)d\tau} = -(a - s)x(t)e^{-(a - s)\int_0^t x(\tau)d\tau}$$

dette innebærer at

$$\int_0^\infty R(t)dt = \frac{R_0}{x_0}\left(-\frac{1}{a-s}\right)\Big|_0^\infty e^{-(a - s)\int_0^t x(\tau)d\tau}$$

eller, når (3.13) innsettes

(3.16) $$\int_0^\infty R(t)dt = \frac{R_0}{x_0}\left(-\frac{1}{a-s}\right)\Big|_0^\infty [x_0 h(t)]^{-\frac{a-s}{\beta}}.$$

Når s = a følger det direkte fra (3.15) og (3.13) at

(3.16') $$\int_0^\infty R(t)dt = \frac{R_0}{x_0}\cdot\frac{1}{\beta}\Big|_0^\infty \mathrm{Ln}[x_0 h(t)].$$

Fra (3.11) følger det at h(t) vokser med t. Det er derfor åpenbart at uttrykket gitt ved (3.16) eller (3.16') må bli lik $+\infty$ for enhver positiv R_0 så sant $s \geqq a$. Dette betyr altså at (2.3) ikke kan bli oppfylt med likhet i dette tilfellet. Med andre ord, hvis $s \geqq a$ fins det ingen løsning for våre variable som tilfredsstiller relasjonene (2.1) - (2.4).[1] Hva vil skje i en økonomi dersom en til tross for dette resultatet likevel har $s \geqq a$? En kan likevel ha (2.1), (2.2) og gjerne også (2.4) (med likhet) oppfylt, men kravet til effektivitet gitt ved (2.3) kan nå ikke være oppfylt. Dette resultatet er ikke så overraskende: I den enkle Solow-Swan modellen som er gitt ved (2.1) og (2.2) når b = 0 er det en velkjent egenskap at dersom s > a vil økonomiens utvikling ikke være effektiv i betydningen vi brukte ved forklaringen av relasjon (2.3) (dette resultatet er vist bl.a. av Dixit (1976, kap. 3)).

La oss nå se på tilfellet hvor s < a, som vi heretter skal anta er oppfylt. Da er det lett å se fra (3.11) at

$$\Big|_0^\infty [x_0 h(t)]^{-\frac{a-s}{\beta}} = -[x_0 h(0)]^{-\frac{a-s}{\beta}} = -1.$$

slik at (3.16) kan skrives

$$\int_0^\infty R(t)dt = \frac{R_0}{(a-s)x_0}.$$

Dersom (2.4) skal holde med likhet, får vi derfor

$$(3.17)\qquad R_0 = (a-s)x_0\, S_0,$$

eller når (3.12) innsettes,

$$(3.18)\qquad R_0 = [(a-s)A\, K_0^{a-1} S_0]^{\frac{1}{1-b}}$$

Vi har altså greid å uttrykke R_0 som funksjon bare av produktfunksjonens parametre, den historisk gitte kapitalbeholdning og ressursbeholdning samt spareraten. Som en ville vente vil R_0 være høyere jo høyere S_0 er. Noe mer overraskende er det kanskje at R_0 er *mindre* jo større K_0 er. Endelig ser vi at R_0 er mindre jo høyere spareraten er.

---

1) Et unntak er den trivielle løsningen R(t) = Y(t) = 0 for alle t, men denne løsningen vil bare oppfylle (2.4) med streng ulikhet.

Med R_0 bestemt ved (3.18) følger det fra resonnementet i slutten av kapittel 2 at tidsutviklingen for alle våre endogene variable er bestemt. I det følgende skal vi se nærmere på egenskaper ved baner for Y(t).

Settes (3.18) inn i (2.1) finner vi et uttrykk for Y_0. Etter litt ordning av ledd får vi

$$(3.19)\qquad Y_0 = [(a-s)^b A\, K_0^{a-b} S_0^{\,b}]^{\frac{1}{1-b}}$$

Fra dette uttrykket går det fram at Y_0 er høyere jo høyere S_0 er. Dessuten ser vi at Y_0 er høyere jo høyere K_0 er dersom $a > b$ (som kanskje er det rimeligste tilfellet), mens det motsatte er tilfelle hvis $a < b$. Denne siste muligheten er ganske overraskende, da resultatet er motsatt av hva som følger fra den enkle Solow-Swan modellen (2.1) - (2.2) med $b = 0$: I den modellen får en $Y_0 = A\, K_0^a$, dvs. alltid $\partial Y_0/\partial K_0 > 0$. I den enkle modellen med $b = 0$ vil dessuten Y_0 være uavhengig av s. Dette er ikke tilfellet når $b > 0$, fra (3.19) ser vi at Y_0 da er lavere jo høyere s er. Siden $C = (1-s)Y$ vil derfor C_0 være lavere jo høyere s er *både* fordi $1 - s$ er lavere jo høyere s er *og* fordi Y_0 er lavere jo høyere s er.

Fra (3.18) og (3.19) ser vi at både R_0 og Y_0 vil være uavhengig av raten for teknisk framgang (m). Det følger imidlertid fra (3.6) at selv om x_0 er uavhengig av m, vil forløpet av x(t) for $t > 0$ avhenge av m. Dette innebærer at utviklingen av R(t) og Y(t) vil avhenge av m. I de to neste kapitlene skal vi studere hvordan utviklingen av R(t) og Y(t) blir for $m > 0$ og for $m = 0$. Men først skal vi se på *vekstraten* til Y(t) på tidspunkt $t = 0$. Fra (3.4) og (3.5) har vi

$$(3.20)\qquad \hat{Y}(t) = \frac{m}{1-b} + \frac{a(s-b)}{1-b}\, x(t).$$

Settes $x_0 = Y_0/K_0$ samt (3.19) inn i dette uttrykket for $t = 0$ får vi

$$(3.21)\qquad \hat{Y}(0) = \frac{m}{1-b} + \frac{a(s-b)}{1-b}\, [(a-s)^b A\, K_0^{a-1} S_0^{\,b}]^{\frac{1}{1-b}}.$$

Fra dette uttrykket ser vi for det første at $\hat{Y}(0)$ er høyere jo høyere m er. Vi ser dessuten at virkningen av K_0 og S_0 på $\hat{Y}(0)$ vil avhenge av fortegnet på $s - b$. Nå vet vi at vi må ha $s < a$. *Hvis* $a \leq b$ må vi derfor ha $s < b$. La oss se på dette tilfellet først. Når $s < b$ ser vi fra (3.21) at

$\hat{Y}(0) < m/(1-b)$, og at $\hat{Y}(0)$ er høyere jo høyere K_0 er og jo lavere S_0 er. Hvis derimot $s > b$, som er mulig hvis $a > b$, vil $\hat{Y}(0) > m/(1-b)$ og effekten av K_0 og S_0 på $\hat{Y}(0)$ bli den motsatte. Endelig vil $\hat{Y}(0) = m/(1-b)$ hvis $s = b$, dvs. $\hat{Y}(0)$ vil i dette tilfellet være uavhengig av K_0 og S_0. Når det gjelder spareratens innvirkning på $\hat{Y}(0)$, er det forholdsvis lett å se fra (3.21) at $\hat{Y}(0)$ er høyere jo høyere s er så sant $s \leqq b$. Hvis $s > b$, kan det videre vises at $\hat{Y}(0)$ er høyere jo høyere s er for s tilstrekkelig nær b, og lavere jo høyere s er for s tilstrekkelig nær a (hvor $a > b$).

Vi skal nå vise hvordan verdien av $Y(t)$ for store verdier av t avhenger av de eksogene variablene K_0 og S_0. Fra (3.4) og (3.5) har vi

$$Y(t) = Y_0 e^{\int_0^t \hat{Y}(\tau)d\tau} = Y_0 e^{\frac{m}{1-b}t} e^{\frac{a(s-b)}{1-b}\int_0^t x(\tau)d\tau}$$

som sammen med (3.13) gir

$$(3.22) \qquad Y(t) = Y_0 e^{\frac{m}{1-b}t} [x_0 h(t)]^{\frac{a(s-b)}{(1-b)\beta}}.$$

Vi definerer nå elastisiteten $\varepsilon(x_0)$ som elastisiteten av $x_0 h(t)$ m.h.p. x_0. Fra (3.11) får vi

$$(3.23) \qquad \varepsilon(x_0) = \frac{\partial[x_0 h(t)]}{\partial x_0} \frac{x_0}{[x_0 h(t)]} = 1 - [x_0 h(t)]^{-1},$$

og fra (3.11) ser vi at

$$(3.24) \qquad \lim_{t\to\infty} \varepsilon(x_0) = 1$$

For å finne hvordan K_0 påvirker $Y(t)$ for store t elastisiterer vi (3.22) m.h.p. K_0. Betegner vi elastisitetene av $Y(t)$, Y_0 og x_0 m.h.p. K_0 med $\check{Y}(t)$, $\check{Y}_0$ og $\check{x}_0$, gir dette

$$(3.25) \qquad \check{Y}(t) = \check{Y}_0 + \frac{a(s-b)}{(1-b)\beta}\varepsilon(x_0) \cdot \check{x}_0,$$

Nå vet vi fra (3.19) at $\check{Y}_0 = (a-b)/(1-b)$ og at $\check{x}_0 = \check{Y}_0 - 1 = (a-1)/(1-b)$. Setter vi dette samt (3.9) inn i (3.25), lar $t \to \infty$ og bruker (3.24) får vi, etter litt regning:

$$(3.26) \qquad \lim_{t\to\infty} \mathrm{El}[Y(t):K_0] = \frac{b(a-s)}{(1-a-b)s+ab}.$$

Med andre ord, for tilstrekkelig stor t vil (siden $s < a$) $Y(t)$ være høyere jo høyere K_0 er. Dette gjelder uansett fortegnet på $(a - b)$, mens vi tidligere fant at Y_0 ville være høyere jo høyere K_0 var hvis og bare hvis $a > b$.

For å finne hvordan S_0 påvirker $Y(t)$ for store t kan vi gå fram på nøyaktig samme måte som over, men må la $\check{Y}(t)$ samt $\check{Y}_0 = \check{x}_0 = b/(1-b)$ stå for elastisiteten m.h.p. S_0 (jfr. (3.19)). Fra (3.25) får vi da, når (3.9) brukes:

$$\text{(3.27)} \qquad \check{Y}(t) = [1 + \frac{a(s-b)}{(1-a-b)s + ab}\,\varepsilon(x_0)]\,\frac{b}{1-b}\,.$$

Nå er det lett å vise fra (3.11) og (3.23) at $\varepsilon(x_0)$ er positiv, men mindre enn 1. Fra (3.27) følger derfor at dersom $s \geqq b$ vil $\check{Y}(t)$ være høyere jo høyere S_0 er for alle $t \geqq 0$. Hvis $s < b$ vil $\check{Y}(t)$ være minst så stor som $\check{Y}(t)$ ville vært hvis $\varepsilon(x_0) = 1$. Men verdien av $\check{Y}(t)$ når $\varepsilon(x_0) = 1$ er nettopp grensen for $\check{Y}(t)$ når $t \to \infty$:

$$\text{(3.28)} \qquad \lim_{t\to\infty} \mathrm{El}[Y(t):S_0] = \frac{bs}{(1-a-b)s + ab}\,,$$

som er positiv for $s > 0$. Vi kan altså konkludere med at hele banen for $Y(t)$ ligger høyere jo høyere S_0 er.

Fra (3.26) ser vi at elastisiteten av $Y(t)$ m.h.p. K_0 for stor t er lavere jo høyere spareraten er, og lik elastisiteten av Y_0 m.h.p. K_0 (som var uavhengig av s, jfr. (3.19)) dersom $s = b$. Fra (3.28) ser vi at elastisiteten av $Y(t)$ m.h.p. S_0 for stor t er høyere jo høyere spareraten er, og lik elastisiteten av Y_0 m.h.p. S_0 (som var uavhengig av s, jfr. (3.19)) dersom $s = b$. Med andre ord, betydningen av K_0 er mindre og betydningen av S_0 er større for det langsiktige produksjonsnivået jo større spareraten er. Dette er som en vil vente: Høy sparerate skaper realkapital, slik at initialverdien av realkapitalen betyr mindre jo høyere spareraten er. Derimot vil knappheten av naturressurser bli mer følsom jo mer av den andre faktoren, nemlig realkapital, en har på lang sikt.

Relasjon (3.22) kan brukes til å si noe om vekstraten for $Y(t)$. Fra (3.11) vet vi at $\dot{h}(t) > 0$, (3.22) sier derfor at $Y(t)$ vokser med en rate som er høyere, lik eller mindre enn $m/(1-b)$ alt etter som $s > b$, $s = b$, $s < b$. Denne sammenhengen følger også fra (3.20), siden $x(t) > 0$. Vi skal se nærmere på det spesielle tilfellet $s = b$, som gir konstant vekstrate, i kapittel 5.

For oversiktens skyld kan det være hensiktsmessig å samle noen av våre resultater om hvordan R_0, Y_0, $\hat{Y}(0)$ samt $Y(t)$ for store t avhenger av sentrale eksogene størrelser. Dette er gjort i tabell 3.1, hvor "+" indikerer at virkningen av en økning i en eksogen variabel øker verdien av en endogen variabel, og motsatt for "-", mens "0" betyr ingen virkning. Vi har foreløpig ikke sett på hvordan s og m påvirker Y(t) for store t, disse feltene i tabellen er derfor krysset ut.

		Virkning av en økning av			
Virkning på		K_0	S_0	s	m
R_0		-	+	-	0
Y_0	a>b	+	+	-	0
	a=b	0	+	-	0
	a<b	-	+	-	0
$\hat{Y}(0)$	s>b	-	+	- for s "nær" a + for s "nær" b	+
	s=b	0	0	+	+
	s<b	+	-	+	+
Y(t) for store t		+	+		
$\lim_{t\to\infty} El[Y(t):K_0]$		0	0	-	0
$\lim_{t\to\infty} El[Y(t):S_0]$		0	0	+	0

Tabell 3.1.

Ved å se på et numerisk eksempel kan vi få en viss føling med størrelsesordenen til noen elastisiteter. Anta at produktfunksjonens parametre, den tekniske framgangen og spareraten er gitt ved

$$
(3.29) \qquad \begin{cases} a = 0,25, \\ b = 0,10, \\ m = 0,02, \\ s = 0,15. \end{cases}
$$

Vi kan da regne ut elastisitetene av R_0 (jfr. (3.18)) og Y_0 (jfr. (3.19)) m.h.p. K_0 og S_0 samt grenseverdiene gitt ved (3.26) og (3.28). Resultatene er gitt i tabell 3.2.

Elast-sitet av	Elastisitet m.h.p.: K_0	S_0
R_0	−0,83	+1,11
Y_0	+0,17	+0,11
$Y(t)$ når $t \to \infty$	+0,08	+0,12

Tabell 3.2.

Som det går fram av tabellen er $Y(t)$ relativt ufølsom overfor endringer i K_0 og S_0, både for $t = 0$ og når $t \to \infty$. F.eks. vil en fordobling av S_0 bare øke Y_0 og $Y(t)$ for store t med mellom 8 og 9%.

I en del av litteraturen som behandler vekst med naturressurser, innføres størrelsen $z(t) = R(t)/S(t)$, dvs. andelen av gjenstående ressursbeholdning som på ethvert tidspunkt brukes opp. Siden $\dot{S} = -R$ må vi ha

$$(3.30) \qquad \hat{S} = -z,$$

som gir

$$(3.31) \qquad \hat{z} = \hat{R} - \hat{S} = \hat{R} + z.$$

Sammen med (3.14) gir dette

(3.32) $\hat{z} - z = \hat{x} - (a-s)x.$

Men for at dette skal holde for alle t når $z_0 = (a-s)x_0$ (jfr. (3.17)), må vi ha

(3.33) $z = (a-s)x$

for alle t, slik at utviklingen av z(t) følger direkte fra (3.10).

4. *Langsiktig utvikling med teknisk framgang.*

Vi antar nå at $m > 0$. Fra (3.6) eller (3.7) ser vi da at $x(t)$ må konvergere mot en positiv stasjonærverdi $\bar{x} = \alpha/\beta$, eller når (3.8) og (3.9) innsettes:

$$(4.1) \qquad \bar{x} = \frac{m}{(1 - a - b)s + ab}$$

For $x(t) < \bar{x}$ (men $x(t) > 0$), følger det av (3.6) eller (3.7) at $\hat{x}(t) > 0$ og $\dot{x}(t) > 0$, mens for $x(t) > \bar{x}$ vil $\hat{x}(t) < 0$ og $\dot{x}(t) < 0$. Det er derfor klart at uansett hvilken positiv verdi som velges for x_0, må $x(t)$ konvergere mot $\bar{x}$ gitt ved (4.1).[1] Siden $x = Y/K$, betyr dette at vekstratene for $Y(t)$ og $K(t)$ konvergerer mot samme vekstrate. Kaller vi denne vekstraten g, følger det fra (3.4) og (4.1) at

$$(4.2) \qquad g = s\bar{x} = \frac{m}{(1 - a - b) + ab/s}.^{2)}$$

En vekstbane hvor $Y(t)$ og $K(t)$ har samme konstante vekstrate kalles ofte en "steady-state" vekstbane eller en proporsjonal vekstbane. Også i den enkle modellen uten naturressurser vil utviklingen konvergere mot en steady-state bane, og i en slik modell vil den asymptotiske vekstraten være høyere jo raskere den tekniske framgangen er, men uavhengig av spareraten. I vår modell ser vi fra (4.2) at den asymptotiske vekstraten g er høyere jo høyere m er. Men til forskjell fra modellen uten naturressurser vil den asymptotiske vekstraten nå være høyere jo høyere s er (jfr. (4.2)). Tolkningen av dette resultatet skal vi komme tilbake til etter å ha sett på den langsiktige utviklingen av $R(t)$. Men først skal vi nevne to poenger som går fram av (4.2).

Det første poenget følger av vårt resultat om at $s < a$ for at modellen (2.1) - (2.4) skal ha løsning. Sammen med (4.2) gir dette

$$(4.3) \qquad g < \frac{m}{1-a},$$

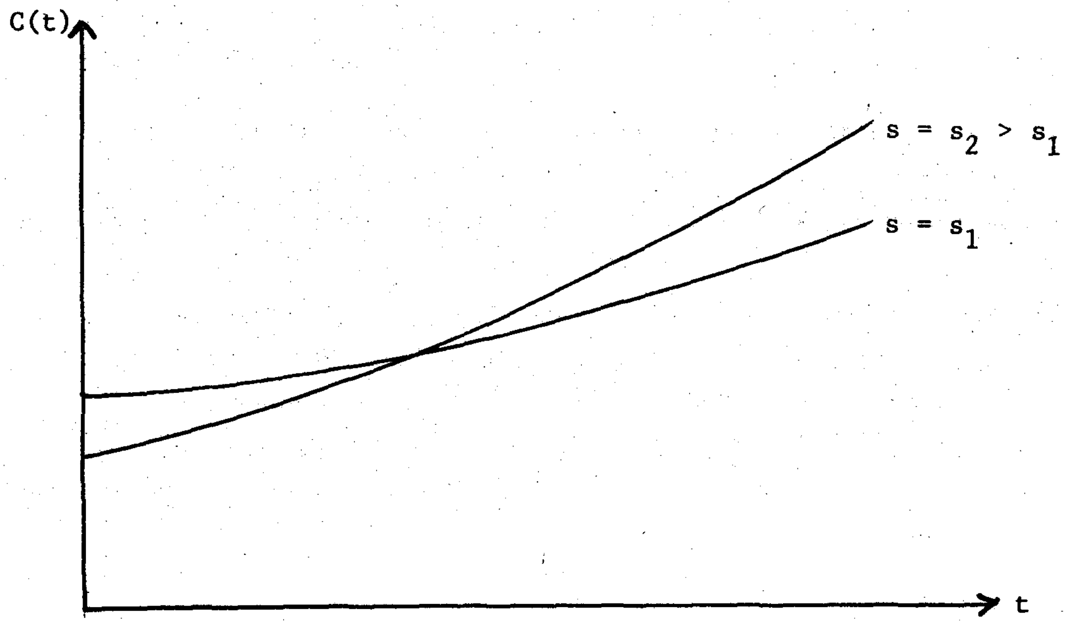
---

1) Vi kunne selvsagt også funnet $\bar{x}$ ved å la $t \to \infty$ i (3.10) og sette inn (3.11), (3.8) og (3.9).

2) Denne vekstraten kunne vi selvsagt også funnet ved å regne ut $\hat{Y}(t)$ fra (3.20) og latt $t \to \infty$.

hvor høyre side er den asymptotiske vekstraten i den enkle modellen (2.1) - (2.2) med b = 0. Med andre ord, den *asymptotiske vekstraten* i modellen *med* naturressurser er alltid lavere enn den asymptotiske vekstraten i den tilsvarende modellen *uten* naturressurser.

Det andre poenget henger sammen med hva vi viste i kapittel 3, nemlig at C_0 (og Y_0) er lavere jo høyere spareraten er. Men fra (4.2) ser vi at den asymptotiske vekstraten for Y(t) og C(t) = (1-s)Y(t) er høyere jo høyere spareraten er. Dette betyr at utviklingen av C(t) for ulike verdier av s ser ut som i figur 4.1, hvor $s_2 > s_1$.



Figur 4.1.

Denne egenskapen ved banen C(t)'s avhengighet av s svarer helt til hva en finner i den enkle modellen uten naturressurser. Figur 4.1 er tegnet slik at C(t) alltid vokser. Dette behøver imidlertid ikke nødvendigvis være tilfelle : Fra (3.21) ser vi at dersom s < b kan vi ha $\hat{C}(0) = \hat{Y}(0) < 0$ for m tilstrekkelig liten.

La oss nå se hva vi kan si om de langsiktige vekstratene for R(t) og S(t). Fra (3.33) følger det at siden $x(t) \to \bar{x}$, må $z(t) \to \bar{z}$, hvor

$$(4.4) \qquad \bar{z} = (a-s)\bar{x} = \frac{(a-s)m}{(1-a-b)s+ab}$$

Men $z(t) \to \bar{z}$ betyr at $\hat{z}(t) \to 0$, fra (3.30) og (3.31) følger det derfor at vekstratene for både R(t) og S(t) går mot den asymptotiske raten $-\bar{z}$. Siden $s < a$ vil $-\bar{z}$ være negativ, dvs. R(t) og S(t) avtar med samme konstante rate asymptotisk. Fra (4.4) følger det at $\bar{z}$ er høyere jo høyere m er og jo lavere s er. Dette betyr at R(t) og S(t) asymptotisk avtar raskere jo raskere den tekniske framgangen er og jo lavere spareraten er.

Det er nå klart hvorfor den asymptotiske vekstraten for Y(t) er lavere jo høyere spareraten er: Vi så i (4.3) at denne vekstraten alltid ville være lavere enn den asymptotiske vekstraten i den enkle modellen uten naturressurser. Årsaken til dette er selvsagt at R(t) avtar langs steady-state banen. Vi så dessuten nettopp at R(t) vil avta langsommere jo høyere spareraten er. Med andre ord: Den vekstdempende effekten av avtakende bruk av naturressurser er mindre jo høyere spareraten er.

Vi nevnte i kapittel 2 (s. 6) at effektivitetsbetingelsen (2.3) var et spesialtilfelle av en liknende betingelse for vekstmodeller med mange typer kapitalvarer. Det er også en annen likhet mellom vår modell og modeller med mange kapitalvarer. I sistnevnte modell-type vil vekstbanen under visse forutsetninger konvergere mot en steady-state bane hvor verdien av beholdningen av alle typer kapitalvarer stiger med samme konstante rate (se f.eks. Dixit (1976, kap. 6)). I vår modell har vi én vanlig kapitalvare, som vokser med rate g. I tillegg har vi beholdningen av naturressurser, som har verdi q(t)S(t) (målt i enheter av Y og K), hvor $q = aY/R$ er naturressursens grenseproduktivitet. Vekstraten for qS er $\hat{q} + \hat{S}$. Fra (3.4), (3.14), (3.30), (4.2) og (4.4) ser vi at i steady-state vekst er

$$\hat{q} = \hat{Y} - \hat{R} = s\bar{x} - [-(a-s)\bar{x}] = a\bar{x}$$

og

$$\hat{S} = -(a-s)\bar{x} ,$$

dvs.

$$\hat{q} + \hat{S} = s\bar{x} = g. \tag{4.5}$$

Med andre ord: Selv om ressursbeholdningen avtar, vil dens verdi stige med samme rate som realkapitalbeholdningen langs en steady-state vekstbane.

Den asymptotiske vekstraten g er uavhengig av initialverdiene K_0 og S_0. Dette er samme resultat som en får i den enkle modellen uten naturressurser. I sistnevnte modell finner en også at *nivået* av banen Y(t) vil være uavhengig av K_0 (S_0 inngår ikke i denne modellen). Dette er imidlertid ikke lenger tilfelle i vår modell, relasjonene (3.26) og (3.28) viser at steady-state banen for Y(t) ligger høyere jo større K_0 er og jo større S_0 er.

Vi skal avslutte dette kapitlet med igjen å se på det numeriske eksemplet gitt ved (3.30). Med disse verdiene får vi:

$$
(4.6) \quad \begin{cases} \bar{x} = 0{,}16 & \text{eller } \bar{x}^{-1} = 6{,}13, \\ g = 0{,}024, & \\ a\bar{x} = 0{,}041, & \\ \bar{z} = 0{,}016 & \text{eller } \bar{z}^{-1} = 61{,}25. \end{cases}
$$

Med andre ord, realkapitalmengden pr. produsert enhet er 6,13, mens vekstraten og profittraten (= kapitalens grensproduktivitet = $a\bar{x}$) er henholdsvis 2,4% og 4,1% i steady-state vekst. Videre blir ressursbruken pr. enhet ressursbeholdning lik 1.6%. En annen måte å uttrykke dette siste på, er å se på $\bar{z}^{-1}$, som sier hvor lenge ressursbeholdningen på ethvert tidspunkt ville vare *hvis* framtidig ressursbruk var konstant. Med vårt talleksempel blir denne perioden ca. 61 år.

Vi kan sammenlikne tallene i (4.6) med hva vi ville fått i den enkle modellen uten naturressurser. Tallene for sistnevnte modell får vi ved å bruke våre formler med b = 0 i stedet for b = 0,10. Dette gir:

$$
(4.7) \quad \begin{cases} \bar{x} = 0{,}18 & \text{eller } \bar{x}^{-1} = 5{,}63, \\ g = 0{,}027, & \\ a\bar{x} = 0{,}044. & \end{cases}
$$

Med andre ord, de asymptotiske verdiene $\bar{x}$, g og $a\bar{x}$ er svært lite påvirket av at den enkle vekstmodellen av Solow-Swan typen modifiseres slik at ikke-fornybare naturressurser inkluderes i modellen.

5. *Tilfellet uten teknisk endring.*

Det er flere grunner til at en kan ønske å se spesielt på tilfellet med $m = 0$. For det første vil ikke $Y(t)/K(t)$ konvergere mot noen positiv konstant som tilfellet er når $m > 0$, mens det på den annen side er forholdsvis lett å videreføre analysen i kapittel 3 og finne et eksplisitt uttrykk for $Y(t)$ for alle t. For det andre har problemstillinger om begrensede naturressurser typisk et svært langsiktig tidsperspektiv, og realismen av positiv eksponensiell teknisk framgang kan være tvilsom på så lang sikt. For det tredje kan det være av interesse å studere hva som skjer *hvis* den tekniske utviklingen skulle stoppe opp, selv om dette regnes som relativt lite sannsynlig.

Selv om $m = 0$, gjelder hele vår analyse i kapittel 3. Spesielt følger det fra (3.22) at

$$Y(t) = Y_0[x_0h(t)]^{\frac{a(s-b)}{(1-b)\beta}}.$$

Setter vi nå inn β fra (3.9) og for $h(t)$ fra (3.11) (med $\alpha = 0$), gir dette

$$Y(t) = Y_0[1 + x_0\beta t]^{\frac{a(s-b)}{(1-a-b)s+ab}}. \tag{5.1}$$

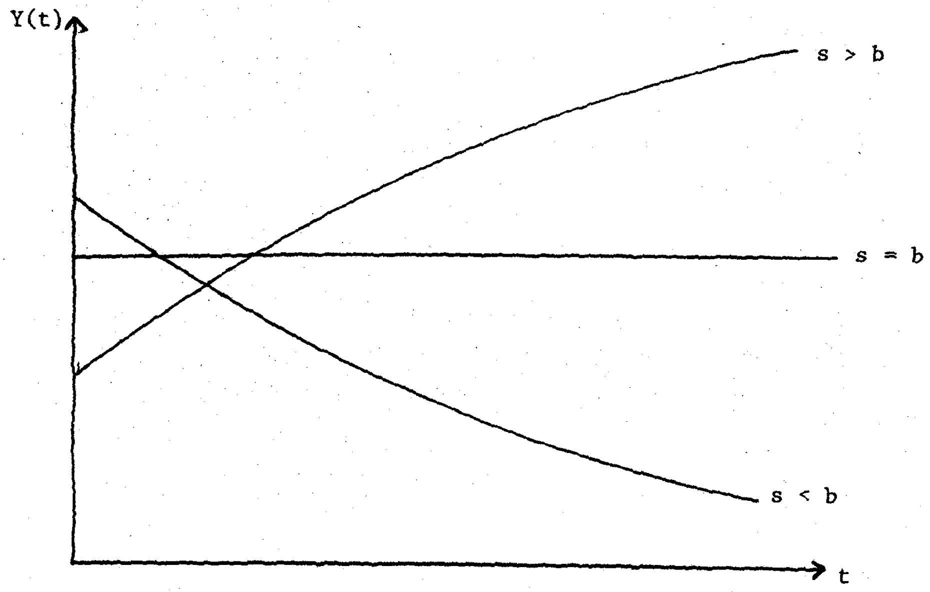
Nå kunne vi videre satt inn β, Y_0 og $x_0 = Y_0/K_0$ fra (3.9) og (3.19), og vi ville fått $Y(t)$ som en eksplisitt funksjon av bare eksogent gitt variable og parametre i tillegg til t. Det er imidlertid mer oversiktelig å ha $Y(t)$ uttrykt som i (5.1) for vår videre drøfting.

Fra (5.1) ser vi at vekstraten til $Y(t)$ er gitt ved

$$\hat{Y}(t) = \frac{a(s-b)}{(1-a-b)s+ab}\,\frac{x_0\beta}{1+x_0\beta t} \tag{5.2}$$

Med andre ord, tallverdien av $\hat{Y}(t)$ vil stadig avta når t vokser, og $|\hat{Y}(t)| \to 0$ når $t \to \infty$. Vi ser videre at $\hat{Y}(t)$ er positiv eller negativ for alle t alt ettersom $s > b$ eller $s < b$. For det spesielle tilfellet $s = b$ vil $Y(t)$ være konstant. Merk at $s \geqq b$ bare er mulig dersom $a > b$, som vi nå skal anta.

Fra før vet vi at Y_0 og C_0 er lavere jo høyere s er (se s. 13). Sammen med resultatet ovenfor betyr det at utviklingen av $Y(t)$ blir som en av de tre banene tegnet *i figur* 5.1, avhengig av om $(s - b)$ er *positiv*, null eller negativ.[1] Siden $C(t)$ er en konstant andel av $Y(t)$, vil konsumbanen ha nøyaktig samme form som banen for $Y(t)$, dvs. en av de tre mulighetene tegnet i figur 5.1.



Figur 5.1.

Vi kan altså konkludere med at hvis $s < b$, vil konsumnivået stadig avta, men aldri bli null. For $s > b$ vil $C(t)$ stadig vokse, og selv om *vekstraten* for $C(t)$ går mot null når t vokser over alle grenser, vil *nivået* for $C(t)$ vokse over alle grenser når t går mot uendelig *(jfr. (5.1))*.

La oss nå se nærmere på det spesielle tilfellet hvor $s = b$. Kaller vi det konstante produksjons- og konsumnivået i dette tilfellet Y^* og C^*, følger det fra (3.19), $Y^* = Y_0$ og $C^* = (1 - b)Y_0$ at

(5.3) $$Y^* = [(a - b)^b A\, K_0^{(a-b)} S_0^{\,b}]^{\frac{1}{1-b}}$$

og

1) Figuren forutsetter at $\dot{Y}(t)$ avtar med t når $s > b$. Dette er det vanlige tilfellet, *men hvis a* $> 0{,}5$, b er tilstrekkelig nær null og s er *tilstrekkelig* nær a vil $\dot{Y}(t)$ vokse med t når $s > b$. Når $s < b$, vil vi alltid få $|\dot{Y}(t)|$ avtagende, slik som i figuren.

$$(5.4) \qquad C^* = (1 - b)[(a - b)^b A\, K_0^{(a-b)} S_0^{\,b}]^{\frac{1}{1-b}}.$$

Uttrykket for C* er identisk med hva som er utledet av Solow (1974).

Grunnen til at tilfellet med s = b, som gir konstant konsum, er av spesiell interesse, er følgende: Spareraten s = b gir det høyest mulige nivå for det initiale konsumnivået når en innskrenker seg til å vurdere utviklinger hvor framtidig konsum aldri er lavere enn dagens. Og en slik innskrenkning i hvilke konsumbaner de nålevende generasjoner bør velge blant vil antakelig mange argumentere for på etisk grunnlag. Litt slagordspreget kunne et slikt grunnlag formuleres som at "nålevende generasjoner har ikke moralsk rett til å bruke mer enn de overlater til framtidige generasjoner". Innskrenkingen $C(t) \geqq C_0$ for alle t utelukker altså s < b. Dersom en i tillegg legger sterk vekt på likhet mellom alle generasjoner, vil konsumbanen C(t) = C* fortone seg som gunstigere enn konsumbaner som gir C(t) < C* for tidlige generasjoner og C(t) > C* for senere generasjoner. Mer presist vil C(t) = C* være den optimale konsumbanen dersom en ønsker å maksimere konsumet for den generasjonen som har det laveste konsumnivået. Et slikt "maksimin kriterium" i spørsmål om inntektsfordeling har vært lansert av Rawls (1971) i en mer generell sammenheng, mens Solow (1974) og Solow & Wan (1976) har brukt dette kriteriet i problemstillinger om økonomisk vekst med naturressurser. Maksimin-kriteriet har vært brukt i problemstillinger om økonomisk vekst også av Arrow (1973), Riley (1976) og Phelps & Riley (1976). Sistnevnte arbeid tar eksplisitt hensyn til at hver generasjon lever i flere perioder (dvs. over et tidsintervall av positiv størrelse når tiden behandles kontinuerlig) og at generasjonene overlapper hverandre.

Vi ser av (5.4) at C* avhenger av de eksogene initialverdiene av kapital- og naturressursbeholdningen i tillegg til av produktfunksjonens parametre. Elastisiteten av C* på K_0 og S_0 er henholdsvis (a-b)/(1-b) og b/(1-b), med talleksemplet gitt ved (3.30) (bortsett fra at vi nå har s = b = 0,10 og m = 0) blir disse henholdsvis 0,17 og 0,11. Disse tallene innebærer f.eks. at en fordobling av K_0 vil øke C* med ca. 12%, mens en fordobling av S_0 vil øke C* med ca. 8%.

Avslutningsvis kan det nevnes at s = b kan være av særskilt interesse også når det finner sted teknisk framgang. Dette henger sammen med hva vi nevnte i begynnelsen av dette kapitlet: En kan aldri være *sikker* på at den tekniske framgangen vil fortsette i framtiden. Då vil $s = b$ være det valget av sparerate som gir det høyeste initiale konsumnivået og som sikrer $C(t) \geqq C_0$ *uansett* om det blir teknisk framgang eller ikke etter $t = 0$. Hvis det med denne spareraten blir teknisk framgang med raten m, vil $Y(t)$ og $C(t)$ vokse med den konstante raten $m/(1-b)$ med $Y_0 = Y^*$ og $C_0 = C^*$ gitt ved (5.3) og (5.4) (jfr. (3.19)). Med vårt talleksempel blir denne konstante vekstraten lik 2,2%.

Referanser:

Arrow, K.J. (1973), "Rawl's principle of just saving, *Swedish Journal of Economics*, 75 (4), 323-335.

Dasgupta, P. og Heal, G. (1974), "The optimal depletion of exhaustible resources", *Review of Economic Studies, Symposium on the Economics of Exhaustible Resources*, 3-28.

Dixit, A.K. (1976), *The Theory of Equilibrium Growth*, Oxford University Press, London.

Dorfman, R., Samuelson, P.A. og Solow, R.M. (1958), *Linear Programming and Economic Analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York.

Garg, P.C. og Sweeney, J.L. (1976), "Optimal growth with depletable resources", upublisert notat.

Heal, G. (1976), "The relationship between price and extraction cost for a resource with a backstop technology", *Bell Journal of Economics*, 7 (2), 371-378.

Hoel, M. (1976), "Nyere utviklinger i teorien om økonomisk vekst", *Sosialøkonomen* nr. 6, 23-33.

Ingham, A. og Simmons, P. (1975), "Natural resources and growing population", *Review of Economic Studies*, 42 (2), 191-206.

Phelps, E.S. og Riley, J.F. (1976), "Rawlsian growth: dynamic programming of capital and wealth for intergenerational "maximin" justice", Working Paper, Department of Economics, University of California, Los Angeles.

Rawls, J. (1971), *A Theory of Justice*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.

Riley, J.G. (1976), "Further remarks on Rawl's principle of just saving", *Scandinavian Journal of Economics*, 78(1), 16-25.

Sen, A.K. (ed.) (1970), *Growth Economics*, Penguin Books, Harmondsworth, Middx.

Solow, R.M. (1956), "A contribution to the theory of economic growth", Quarterly Journal of Economics, 70 (1), 65-94. Også trykket i Sen (ed.) (1970), 161-192.

Solow, R.M. (1974), "Intergenerational equity and exhaustible resources", *Review of Economic Studies, Symposium on the Economics of Exhaustible Resources*, 29-45.

Solow, R.M. og Wan, F.Y. (1976), "Extraction costs in the theory of exhaustible resources", *Bell Journal of Economics*, 7 (2), 359-370.

Stiglitz, J. (1974a), "Growth with exhaustible resources: efficient and optimal growth paths, *Review of Economic Studies, Symposium on the Economics of Exhaustible Resources*, 123-138.

Stiglitz, J. (1974b), "Growth with exhaustible resources: the competitive economy, *Review of Economic Studies, Symposium on the Economics of Exhaustible Resources*, 139-152.

Swan, J.W. (1956), "Economic growth and capital accumulation, *Economic Record*, 32 (2), 334-61.

Sydsæter, K. og Thalberg, B. (1976), *Mathematisk Formalsamling*, Dreyers Forlag, Oslo.

Weinstein, M.C. og Zeckhanser, R.J. (1974), "Use patterns for depletable and recycleable resources", *Review of Economic Studies, Symposium on the Economics of Exhaustible Resources*, 67-88.